Základné stochastické procesy vo financiách

Marko Lalić

Technická Univerzita v Košiciach
Ekonomická fakulta

20. Január 2012

- Wienerov proces
- Itôova lema
- Geometrický Brownov pohyb
- Mean reverting procesy

WIENEROV PROCES

základné charakteristiky

- Stochastický proces
- Dôležitá úloha v aplikovanej matematike, fyzike a financiách
- Tvorí základ niektorých procesov (pohybov) ako sú geometrický Brownov pohyb, modely úrokových sadzieb a niektoré modely založené na stochastickej volatilite
- Označujeme ho ako W, resp W_t (hodnota v čase t)
- V niektorých literatúrach je možné sa strenúť s označením Z alebo B

- Základné charakteristiky Wienerovho procesu

$$W_0 = 0$$

- pre $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s)$$

$$W_t \sim N(0, t)$$

- Stredná hodnota: $E(W_t) = 0$
- Rozptyl: $VAR(W_t) = E(W_t^2) - E(W_t)^2 = t$

- Hustota pravdepodobnosti:

$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{(x)^2}{2t}\right)$$

- Distribučná funkcia:

$$F_{W_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{q^2}{2t}\right) dq = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right]$$

$$erf(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{x} exp(q^2) dq$$

Zmena hodnoty W_t

- Pre lepšie pochopenie zmien v stochastických procesoch sú dôležité nasledovné vzťahy:
- pre zmenu v čase t platí pre W: $\Delta W = W_{t+\Delta t} - W_t$
- Z predchádzajúcich vzťahov tak platí:

$$E[\Delta W_t] = 0$$

$$VAR[\Delta W_t] = \Delta t$$

$$VAR[\Delta W_t] = E[(\Delta W_t)^2] - E[\Delta W_t]^2 = E[(\Delta W_t)^2] = \Delta t$$

$$E[[\Delta W_t].[\Delta W_s]] = 0$$

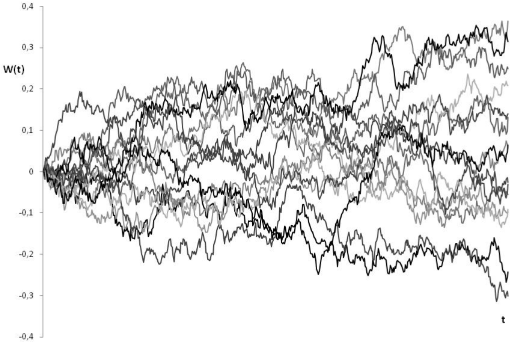
- Ak uvažujeme o tom, že $\Delta t \to 0$ tak platí:

$$\Delta W_t = dW_t$$

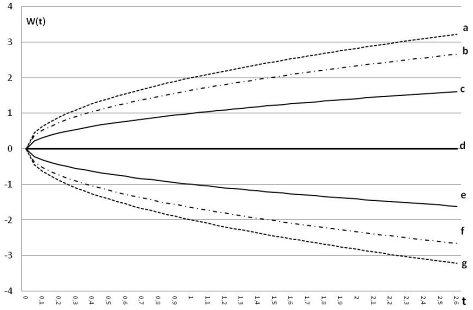
$$(dW_t)^2 = dt$$

Simulácia

- $\Delta W = \sqrt{\Delta t}\epsilon;\ \epsilon \sim N(0;1)$
- $W_t = \sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i;\ n = \frac{t}{\Delta t}$



Obr.: Simulácia Wienerovho procesu, $\Delta t = 100^{-1}$



Obr.: stredná hodnota W_t a násobky smerodajnej odchýlky

$d = E[W_t] = 0$

$a = E[W_t] + 2\sigma[W_t] = 2\sqrt{t}$

$b = E[W_t] + 1.65\sigma[W_t] = 1.65\sqrt{t}$

$c = E[W_t] + \sigma[W_t] = \sqrt{t}$

$g = E[W_t] - 2\sigma[W_t] = -2\sqrt{t}$

$f = -1.65\sigma[W_t] = -1.65\sqrt{t}$

$e = E[W_t] - \sigma[W_t] = -\sqrt{t}$

ITÔOVA LEMA

Vyžitie Itôovej lemy a Itôov proces

- Slúži na nájdenie diferenciálu funkcie u(X,t) stochastického procesu
- Využíva Taylorov rozvoj a vzťahy platiace pre Wienerov proces
- Prvá známejšia aplikácia - odovdenie Black Scholesovho modelu
- Predpoklad: Majme funkciu $u(X, t)$, pričom je to nenáhodná spojitá funkcia so spojitými parciálnymi deriváciami podľa X a t. X sa riadi Itôovým procesom:

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW_t$$

- Stochastický proces

$$Y_t = u(X_t, t)$$

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW_t$$

- a(X,t) a b(X,t) sa označujú aj ako adapted processes
- pokiaľ sú a(X,t) a b(X,t) konštanty tak hovoríme o všeobecnom Wienerovom procese alebo Brownovom pohybe
- výraz a(X,t) predstavuje drift procesu -deterministickú zložku
- výraz b(X,t) predstavuje koeficient ku stochastickej zložke procesu - ide napríklad o volatilitu
- v prípade, že $dX = adt + bdW_t$, tak $Y = \int dX = X$
- v prípade, že $\frac{dX}{X} = adt + bdW_t$, tak $Y = \int \frac{dX}{X} dX = ln(X)$

Diferenciál stoch. procesu

- podľa Taylorovho rozvoja vieme vyjadriť diferenciál funkcie u(X,t) (funkcia času a X) resp. Y :

$$\Delta Y = \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial u}{\partial X}\Delta X +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}(\Delta X)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial X}(\Delta t)(\Delta X)\right)$$

- dX prepíšeme na:

$$\Delta X = a(X,t)\Delta t + b(X,t)\Delta W$$

Odvodenie Itôovej lemy

- Prepísanú rovnicu dX dosádzame do dY
- pre $(\Delta X)^2$ platí:

$$(a(X,t)\Delta t)^2 + b(X,t)^2.(\Delta W_t)^2 + 2a(X,t)b(X,t)\Delta t.\Delta W_t$$

- vzhľadom na to, že $\Delta t \to 0$, tak môžeme výrazy s Δt, $(\Delta t)^2$ zanedbať
- znamená to, že výrazy z Taylorovho rozvoja : $2\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial X}(\Delta t)(\Delta X)$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t)^2$ vypadnú a časť $(\Delta X)^2$ nahradíme $b(X,t)^2 dt$ pretože $(dW_t)^2 = dt$
- diferenciál Y teda vieme vyjadriť ako:

$$dY = \left(a(X,t)\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} b(X,t)^2 \right) dt + b(X,t)\frac{\partial u}{\partial x} dW_t$$

GEOMETRICKÝ BROWNOV POHYB

Využitie a základné charakteristiky

- GBP je vhodný na aplikáciu do financií
- Modelovanie cien akcií a komodít
- Východisko pre Black Scholesov model
- GBP vieme vyjadriť ako:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- alebo:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

- Stochastický proces Y je tu definovaný ako:

$$Y = u(S) = ln(S)$$

Itôova lema pre GBP

- Dosadením GBP do všeobecnej rovnice *du* vyjadrebnej pomocou Itôovej lemy dostávame:

$$du = \left(\mu S \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \sigma S \frac{\partial u}{\partial S} dW_t$$

- Na vyjadrenie *du* potrebujeme parciálne derivácie funkcie u:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

- Dosadením parciálnych derivácií do *du* dostávame:

$$du = \left(\mu S \frac{1}{S} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S^2}\right)S^2\sigma^2\right)dt + \sigma S \frac{1}{S} dW_t$$

- Zjednodušenín dostávame vzťah vyplývajúci z *du* :

$$du = d(ln(S)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

rovnica pre S_T a vlastnosti rozdelenia S_T

- Integrovaním rovnice vyplývajúcej z *du* sa vieme dopracovať ku cene S v čase T (S_T):

$$\int_0^T dln(S) = \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \int_0^T \sigma dW_t$$

$$ln(S_T) - ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T - \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 dW_t\right) 0 + \sigma(W_T - W_0)$$

$$ln\frac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 dW_t\right) T + \sigma W_T$$

$$S_T = S_0 exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W_T\right)$$

- Stredná hodnota S_T

$$E[S_T] = S_0 exp(\mu T)$$

- Rozptyl S_T

$$VAR[S_T] = S_0^2 exp(2\mu T) exp((\sigma^2 T) - 1)$$

- Hustota pravdepodobnosti pre $ln(S_T)$:

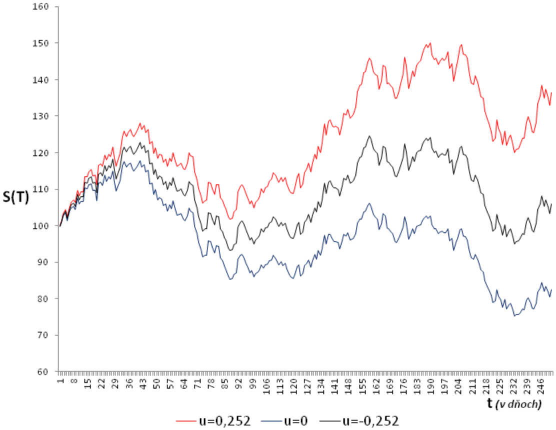
$$f_{S_T}(s, T, \sigma, S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} exp\left(-\frac{(ln(s) - ln(S_0) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}\right)$$

- pre $ln(S_T)$ teda platí:

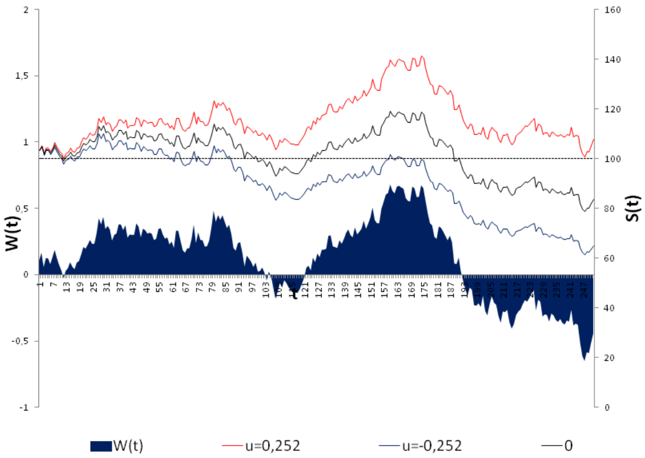
$$ln(S_T) \sim N\left(ln(S_0) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T\right)$$

- S_T sa tak dá popísať lognormálnym rozdelením

Simulácie



Obr.: Simulácia GBP, $\Delta t = 252^{-1}$, $\sigma = 0.3$, $S_0 = 100$



Obr.: Simulácia GBP a Wienerov proces, $\Delta t = 252^{-1}$, $\sigma = 0.3$, $S_0 = 100$

MEAN REVERTING PROCESY

- Slúžia na modelovanie stochastického procesu, ktorý má tendenciu sa vracať k svojmu priemeru
- Aplikácia vo fyzike, matematike ale aj vo financiách
- Použitie vo financiách: modelovanie veličín ktoré majú tendenciu sa vracať k svoju priemeru -napríklad úrokové sadzby, volatilita, akciový trh v určitých podmienkach
- taktiež využívajú Wienerov proces

Ornstein Uhlenbeck proces

- Proces, ktorý môžeme napísať ako:

$$dx_t = \lambda(\alpha - x_t)dt + \sigma dW_t$$

- pre parametre procesu platí $\alpha \in R$,$\lambda > 0$
- λ určuje tzv. speed of reversion - rýchlosť akou sa vracia proces k svojej priemrnej hodnote α
- čím je λ väčšia, tým systém (proces) prudšie reaguje na odchýlenie od priemeru
- základné charakteristiky

$$x_T = \alpha + (x_0 - \alpha)exp(-\lambda t) + \sigma \int_0^T exp(-\lambda(T - t))dW_t$$

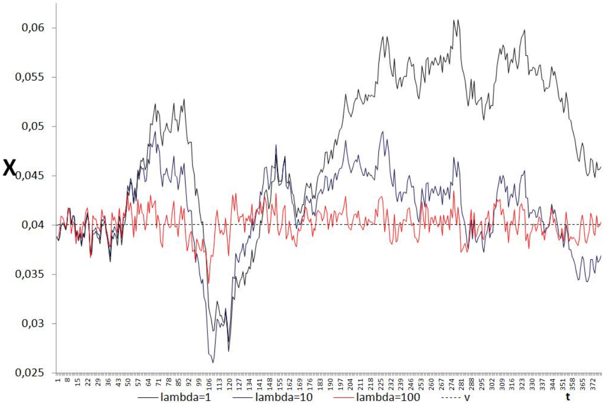
- Stredná hodnota a rozptyl

$$E[x_T] = \alpha + (x_0 - \alpha)exp(-\lambda T)$$

$$VAR[x_T] = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - exp(-2\lambda T))$$

- Využitie :**Vasickov model** modelovanie úrokových sadzieb, x_t predstavuje úrokové sadzby a α je priemerná hodnota úrokových sadzieb

Simulácia



Obr.: Simulácia Ornstein Uhlenbeck-ovho procesu pre rôzne λ, $x_0 = 0.04$, $\sigma = 0.3$, $\Delta t = 252^{-1}$

Stochastická volatilita

- Na finančných trhoch je možné vidieť, že volatilita sa môže meniť - napr. v závislosti od stavu na trhu
- napríklad akciový trh - pri rastúcom trende volatilita klesá, resp. sa udržuje na nižšej úrovni, pri poklesoch a korekciách volatilita rastie (behaviorálna zložka)
- existuje viacero modelov stochastickej volatility - značná časť z nich má charakter mean reverting procesu
- dôvodom použitia je správanie sa volatility - nespráva sa tak ako napr. cena akcií, ktorá môže rásť niekoľkonásobne- má charakter vracať sa k priemerným hodnotám
- ak by bola volatilita modelovaná prostredníctvom geometrického Brownovho pohybu tak by jej hodnoty mohli odletieť veľmi vysoko na dlhé obdobie
- využitie : oceňovanie opcií a modelovanie volatility smile-u

- proces popisujúci stochastickú volatilitu, modeluje sa však rozptyl:

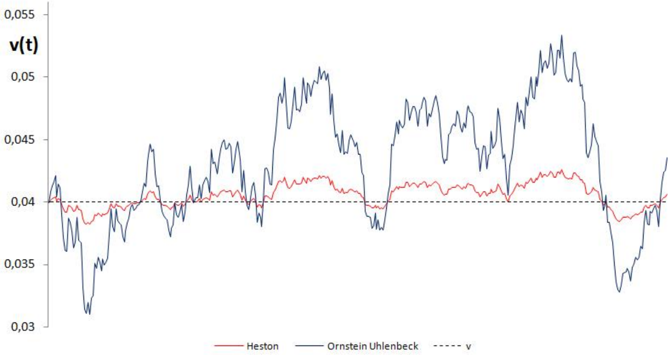
$$dv_t = \lambda(\tilde{v} - v_t)dt + \xi v_t^{\gamma} dW_t^{vol}$$

- $\tilde{v}$ je priemerný rozptyl, ξ volatilita volatility a λ je speed reversion podobne ako u Ornstein Uhlenbeckovho procesu,
- modely sa líšia koeficientom γ : Hestonov model $\gamma = 0.5$, 3-2 model $\gamma = 1.5$, Steinov model $\gamma = 0$,
- ceny aktíva potom modelujeme ako $dS_t = \mu S dt + \sqrt{v_t}.SdW_t^S$
- medzi dW_t^{vol} a dW_t^S je korelácia ρ a teda platí:

$$dW_t^{vol} = \rho dW_t^S + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^n$$

- dW_t^n je nezávislé na žiadnom procese

Porovnanie Ornstein Uhlenbeck-ovho procesu a Hestonovho modelu



Obr.: Simulácia Ornstein Uhlenbeck-ovho procesu Hestonovho modelu pre rozptyl λ=0.25, $v_0 = 0.04$, $\sigma = \xi = 0.3$, $\Delta t = 252^{-1}$

Záver

- Stochastické procesy môžeme využiť v rôznych sférach financií
- hlavná oblasť sú finančné trhy
- GBP je vhodný na modelovanie cien akcií a komodít, mean reverting procesy na modelovanie úrokových sadzieb alebo volatility
- vieme prostredníctvom simulácie takto testovať rôzne investičné stratégie (opcie, hedging..) v rôznych situáciách na trhu

ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ