

HEDGING PRIEMERU CENY S OPCIAMÍ V PODMIENKACH KONŠTANTNEJ VOLATILITY

Marko LALIĆ

Technická Univerzita v Košiciach, Ekonomická fakulta
Katedra financií

marko.lalic@tuke.sk

Abstract

Práca sa zaoberá hedgingom priemeru cien podkladových aktív s opcami. Hedgingové stratégie využívajú long pozície v call opciách a short pozície v put opciách. V práci je popísaná aj stratégia, ktorá využíva ázijskú opciu. Hlavným prínosom práce sú simulácie rôznych situácií na trhu, ktoré vyhodnocujú úspešnosť navrhnutých hedgingových stratégií. Pri simuláciách je využitý geometrický Brownov pohyb s konštantnou volatilitou.

Kľúčové slová: priemer cien, opcie, hedging, ázijská opcia, geometrický Brownov pohyb, simulácie

JEL: G17

1 ÚVOD

Predstavme si, že sme ekonomický subjekt, ktorý potrebuje v určitých periódach nakupovať nejaké aktívum. Môže ísť o subjekt, ktorý spláca pravidelne splátky úveru v cudzej mene, o výrobný podnik, ktorý kupuje pravidelne určitú komoditu, prípadne sme investor, ktorí chce kúpiť určité aktíva postupne v priebehu určitého časového intervalu. Vzhľadom na to, že ceny na finančných trhoch nie sú stále každý z týchto subjektov podlieha istým trhovým rizikám. V prípade, ak kupujeme aktíva postupne, tak nás možno až tak nezaujímajú jednotlivé ceny aktív v časoch nákupu, ale konečné náklady (cena) za celé obdobie nákupu a tým pádom aj priemerná cena [20],[19],[10].

Prvá časť práce je zameraná na definovanie vzťahov medzi cenami a priemerom a hedgingovou stratégiou. Definuje taktiež rozdiel medzi časovými bodmi kedy kupujeme aktívum a kedy sa tvorí cena aktíva (napr. ceny aktíva sa menia každý deň, ale my kupujeme raz za 20 dní).

Druhá časť práce popisuje opcie, ich oceňovanie a hedgingové stratégie, ktoré sú v práci nasimulované. V tejto časti sú nedefinované už konkrétne vzťahy na výpočet toho ako daná opčná stratégia vplýva na priemer cien z obdobi kedy sme kupovali aktívum.

Tretia časť práce je zameraná na definovania procesu ceny – využijeme geometrický Brownov pohyb, kde je konštantná volatility, pomocou, ktorej aj oceníme opcie. Simulácia je realizovaná pre viaceré situácie na trhu. V poslednej časti sú rozobrané výsledky hedgingu pre viaceré situácie na trhu a navrhnuté stratégie a opcie.

2 PRIEMERNÁ CENA A HEDGING

Majme podkladové aktívum X , ktoré potrebujeme nakupovať v istých časových bodoch. Množina týchto bodov je:

$$T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} \quad (1)$$

Proces vytvárania ceny podkladového aktíva prebieha v časových bodoch, ktoré môžeme zapísať ako:

$$\Theta = \{t_0, t_1, t_2 \dots \dots t_j \dots \dots t_L\} \quad (2)$$

Pričom platí :

$$T \subseteq \Theta \quad (3)$$

$$t_L - \tau_N = 0 \quad (4)$$

Uvažujeme o nakupovaní podkladového aktíva v pravidelných intervaloch, čiže platí:

$$\forall i \in \langle 1; N \rangle: \tau_i - \tau_{i-1} = d\tau = \xi \quad (5)$$

Z predošlých zápisov je teda zrejmé, že :

$$dt \leq \xi \quad (6)$$

$$N \leq L \quad (7)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} L = \infty \quad (8)$$

$S(X, \tau_i)$ predstavuje cenu podkladového aktíva X v čase τ_i a $\varphi(S(X, \tau_i), \tau_i)$ predstavuje množstvo nakúpeného aktíva X pri cene v čase τ_i . Vektor φ potom vyjadruje množstvá nakúpených podkladových aktív v časových bodoch patriacich do T :

$$\varphi^T = (\varphi(S(X, \tau_0), \tau_0), \varphi(S(X, \tau_1), \tau_1), \varphi(S(X, \tau_2), \tau_2) \dots \dots \varphi(S(X, \tau_N), \tau_N)) \quad (9)$$

a vektor s predstavuje ceny podkladového aktíva X v časových bodoch patriacich do T (vyjadrené v (1)):

$$s^T = (S(X, \tau_0), S(X, \tau_1), S(X, \tau_2), \dots \dots \dots S(X, \tau_N)) \quad (10)$$

Celkové náklady na nákup podkladového aktíva, ktoré dosiahneme do času t_L vieme vyjadriť nasledovnou rovnicou:

$$\varpi = \varphi^T s \quad (11)$$

Ak uvažujeme o konštantnom množstve nakupovaného aktíva, tak platí:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i} = 0; \varphi(S(X, \tau_i), \tau_i) = \varphi \quad (12)$$

Funkciu (11) potom vieme pretransformovať do nasledovného zápisu:

$$\varpi = \varphi \cdot s^T e_{N+1} \quad (13)$$

kde e_{N+1} je jednotkový vektor s $N+1$ prvkami.

Výraz ϖ vyjadrený v rovnici (13) takto podlieha hlavne rizikám, ktoré sú spojené so zmenou ceny podkladového aktíva X ($S(X, \tau_i)$), pričom pre samotného nákupcu nie sú až tak dôležité ceny podkladového aktíva v časoch nákupu, ale priemer jednotlivých cien, ktorý môžeme vyjadriť ako:

$$\phi(\varpi) = \varphi \cdot s^T e_{N+1} \cdot (N + 1)^{-1} \quad (14)$$

Jednou z možností ako znížiť expozíciu voči rizikám plynúcich zo zmien cien je hedging. Ku hodnote ϖ z rovnice (14) teda pripočítame ešte aj funkciu hedgingu:

$$\phi(\varpi + \psi) = \{\varphi \cdot s^T e_{N+1} + \psi(a, s)\}(N + 1)^{-1} \quad (15)$$

kde a predstavuje zvolenú hedgingovú stratégiu a s predstavuje jednotlivé $S(X, \tau_i)$. Pod typom stratégie sú zahrnuté nástroje, pomocou ktorých je možné vytvoriť transfer rizika. Stratégia sa dá kvantifikovať aj pomocou nákladov na nákup/ predaj finančných inštrumentov a ziskovej funkcie pri jednotlivých $S(X, \tau_i)$, čiže :

$$a = g(\bar{p}, z(S(X, \tau_i)), f) \quad (16)$$

kde \bar{p} predstavuje náklady na hedging, $z(S(X, \tau_i))$ predstavuje výplatné funkcie finančných inštrumentov, f je spôsob s akým otvárame pozície v nových inštrumentoch.

3 OPCIE A POUŽITÉ OPČNÉ STRATÉGIE

Finančné opcie predstavujú jednu z možností ako sa zaistiť proti nežiaducej zmene ceny podkladového aktíva. Opcia ako taká predstavuje právo kúpiť (call opcia) alebo predat' (put opcia) podkladové aktívum. Opcie európskeho typu toto právo špecifikujú len na expiračný deň. Hodnotu call opcie, v deň splatnosti je možné popísať funkciou[18]:

$$C(S, K, t) = \max(S_t - K, 0) \quad (17)$$

Hodnotu put opcie v deň splatnosti je možné popísať rovnicou[18]:

$$P(S, K, t) = \max(K - S_t, 0) \quad (18)$$

Hodnota opcie so splatnosťou $t > 0$ je funkciou podielu spotovej a realizačnej ceny (S/K), volatility σ , bezrizikovej úrokovej sadzby (r), času do splatnosti (t). Na oceňovanie opcií môžeme použiť Black Scholesov vzorec[1] :

$$p_{\omega_1 t_e} = \omega_1 S \Phi(\omega_1 d_1) - \omega_1 e^{-r t_e} K \Phi(\omega_1 d_2) \quad (19)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S T_0}{K}\right) + \left(u_{t_e} + \frac{\sigma_{impl, t_e}^2}{2}\right) \cdot (t_e)}{\sigma_{impl, t_e} \sqrt{t_e}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma_{impl, t_e} \sqrt{t_e} \quad (20)$$

- $\omega_1 = +1$ pre call opciu; $\omega_1 = -1$ pre put opciu

- u_{t_e} – bezriziková úroková sadzba
- σ_{impl,t_e} - implikovaná volatility preš splatnosť t_e
- K – realizačná cena
- S -spotová cena
- $\Phi(\cdot)$ – distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia

3.1 Stratégia A1

Nákup call opcií v čase τ_{i-1} som splatnosťou v čase τ_i , (pre $i \geq 1$), s realizačnou cenou $K = S(X, \tau_{i-1})$ a volatilitou σ_{τ_i} . Výplatná funkcia týchto opcií je:

$$z_{\tau_i} = \max(\{S(X, \tau_i) - S(X, \tau_{i-1})\}; 0) \quad (21)$$

Pre lepšiu prehľadnosť môžeme zaviesť :

$$S(X, \tau_i) - S(X, \tau_{i-1}) = \Delta_i \quad (22)$$

Prvky vektora d_{call} predstavujú príjmy z realizácie opcií :

$$d_{A1call+}^T = (\max(\Delta_1; 0), \max(\Delta_2; 0), \max(\Delta_3; 0) \dots \dots \dots \max(\Delta_N; 0)) \quad (23)$$

A vektor p_{call} predstavuje ceny opcií, ktoré sú kupované v čase τ_i :

$$p_{call}^T = (p_{call,\tau_0}, p_{call,\tau_1}, p_{call,\tau_2} \dots \dots \dots p_{call,\tau_{N-1}}) \quad (24)$$

Pre jednotlivé ceny call opcií platí:

$$p_{\tau_i} = S(X, \tau_i)\Phi(d_1) - e^{-r_{t_e}(t_e)}K\Phi(d_2) \quad (25)$$

Vzhľadom na to, že $K = S(X, \tau_i)$, tak rovnicu ceny call opcie môžeme upraviť na:

$$p_{\tau_i} = S(X, \tau_i) \left[\Phi\left(\frac{(r+0,5\sigma_{\tau_i}^2)\xi}{\sqrt{\sigma_{\tau_i}^2\xi}}\right) - e^{-r_{t_e}(t_e)}\Phi\left(\frac{(r-0,5\sigma_{\tau_i}^2)\xi}{\sqrt{\sigma_{\tau_i}^2\xi}}\right) \right] \quad (26)$$

Funkcia hedgingu potom bude:

$$-\psi = (d_{call}^T e_N - p_{call}^T e_N)\varphi \quad (27)$$

3.2 Stratégia A2

Predaj put opcií v čase τ_{i-1} som splatnosťou v čase τ_i , (pre $i \geq 1$), s realizačnou cenou $K = S(X, \tau_{i-1})$ a volatilitou σ_{τ_i} . Výplatná funkcia týchto opcií je:

$$z_{\tau_i} = \max(-\{S(X, \tau_i) - S(X, \tau_{i-1})\}; 0) = \max(-\Delta_i; 0) \quad (28)$$

Prvky vektora d_{put} predstavujú vyplácanie realizácie opcií nákupcom opcií (predávajúci platí):

$$d_{A2put-}^T = (-\max(-\Delta_1; 0), -\max(-\Delta_2; 0), -\max(-\Delta_3; 0) \dots \dots \dots -\max(-\Delta_N; 0))$$

(29)

A vektor p_{put} predstavuje ceny opcií, ktoré sú predávané v čase τ_i :

$$p_{\text{put}}^T = (-p_{\text{put},\tau_0}, -p_{\text{put},\tau_1}, -p_{\text{put},\tau_2} \dots \dots \dots -p_{\text{put},\tau_{N-1}}) \quad (30)$$

Pre jednotlivé ceny put opcií platí:

$$p_{\tau_i} = -S(X, \tau_i)\Phi(-d_1) + e^{-r_{te}(t_e)}K\Phi(-d_2) \quad (31)$$

Funkcia hedgingu potom bude:

$$-\psi = (d_{\text{put}}^T e_N - p_{\text{put}}^T e_N)\varphi' \quad (32)$$

3.3 Stratégia A3

Stratégia A3 je zameraná na nakúpenie call opcií v čase t_0 so splatnosťou v časoch nákupu podkladového aktíva X, čiže v časových bodoch, ktoré patria do množiny T. Realizačná cena týchto opcií je zhodná so spotovou cenou v čase t_0 . Výplatná funkcia týchto opcií je :

$$z_{\tau_i} = \max(\{S(X, \tau_i) - S(X, \tau_0)\}; 0) \quad (33)$$

Cenu call opcie, so splatnosťou v čase τ_i a kupovanú v čase τ_0 vieme vyjadriť pomocou vzťahu:

$$p_{\tau_i} = S(X, \tau_0) \left[\Phi\left(\frac{(r+0,5\sigma_{\tau_i}^2)i.\xi}{\sqrt{\sigma_{\tau_i}^2\xi.i}}\right) - e^{-r_{te}(t_i)}\Phi\left(\frac{(r-0,5\sigma_{\tau_i}^2)i.\xi}{\sqrt{\sigma_{\tau_i}^2\xi.i}}\right) \right] \quad (34)$$

Prvky vektora d_{callA3} predstavujú príjmy z realizácie opcie :

$$d_{\text{callA3}}^T = (\max(\{S(X, \tau_1) - S(X, \tau_0)\}; 0), \max(\{S(X, \tau_2) - S(X, \tau_0)\}; 0), \dots, \max(\{S(X, \tau_{N-1}) - S(X, \tau_0)\}; 0) \quad (35)$$

Funkcia hedgingu potom bude:

$$-\psi = (d_{\text{callA3}}^T e_N - p_{\text{callA3}}^T e_N)\varphi' \quad (36)$$

kde p_{callA3}^T predstavuje vektor cien opcií.

3.4 Stratégia A4

Stratégia A4 je zameraná na predávanie put opcií v čase t_0 so splatnosťou v časoch nákupu podkladového aktíva X, čiže v časových bodoch, ktoré patria do množiny T. Realizačná cena týchto opcií je zhodná so spotovou cenou v čase t_0 . Výplatná funkcia týchto opcií je :

$$z_{\tau_i} = \max(\{-S(X, \tau_i) + S(X, \tau_0)\}; 0) \quad (37)$$

Cenu call opcie, so splatnosťou v čase τ_i a kupovanú v čase τ_0 vieme vyjadriť pomocou vzťahu:

$$p_{\tau_i} = S(X, \tau_0) \left[-\Phi \left(\frac{(r+0,5\sigma_{\tau_i}^2)i.\xi}{\sqrt{\sigma_{\tau_i}^2\xi.i}} \right) + e^{-r_{t_e}(t_i)} \Phi \left(\frac{(r-0,5\sigma_{\tau_i}^2)i.\xi}{\sqrt{\sigma_{\tau_i}^2\xi.i}} \right) \right] \quad (38)$$

Prvky vektora d_{callA3} predstavujú výplatu z realizácie opcie kupujúcim :

$$d_{callA3}^T = (\max(\{-S(X, \tau_1) + S(X, \tau_0)\}; 0), \max(\{-S(X, \tau_2) + S(X, \tau_0)\}; 0), \dots \dots \dots \max(\{-S(X, \tau_N) + S(X, \tau_0)\}; 0)) \quad (39)$$

Funkcia hedgingu potom bude:

$$-\psi = (d_{putA4}^T e_N - p_{putA4}^T e_N) \varphi \quad (40)$$

kde d_{putA4}^T predstavuje vektor cien predaných put opcií (prvky sú záporné).

3.5 Stratégia A5 –použitie ázijskej opcie

Ázijské opcie sú exotické opcie, ktorých predmetom ich výplatnej funkcie a hodnoty je priemer podkladového aktíva počas určitej časti životnosti opcie. Vzhľadom na vzťah realizačnej ceny ku priemeru existujú 2 základné typy ázijských opcií :

- Priemer je „podkladovým“ aktívom – *average price option* – zisk z opcie závisí od vzdialenosti priemeru od realizačnej hodnoty (vopred stanovenej hodnoty priemeru) v čase splatnosti opcie.
- Priemer je realizačnou cenou – *average strike option* - zisk závisí od vzdialenosti priemeru od spotovej ceny v čase splatnosti opcie.[1][4][21]

Výplatné funkcie týchto dvoch typov opcií, sú definované v nasledujúcich rovniciach:

- Average price option: $payoff = \max(\omega_1(\pi A(T_1; T_2) - K_A))$
- Average strike option : $payoff = \max(\omega_1(S_T - \pi A(T_1; T_2)))$
 - $\omega_1=1$ pri call opciách a $\omega_1 = -1$ pri put opciách
 - π predstavuje násobok priemeru
 - T_1 čas kedy sa začína počítať priemer, T_2 čas ukončenia počítania priemeru

Bez ohľadu na druh ázijskej opcie, vieme vyjadriť cenu opcie pomocou Black Scholesovho vzorca[1]:

$$p_{\omega_1} = \omega_1 S \Phi(\omega_1 d_1) - \omega_1 e^{-uT} K \Phi(\omega_1 d_2) = \omega_1 \exp(-rT) (F \Phi(\omega_1 d_1) - \Phi(\omega_1 d_2)) \quad (41)$$

Cenu average price option vieme vyjadriť pomocou nasledovných rovníc[1][12]:

$$F = \frac{\pi S \cdot \exp(gT_1) (\exp(g(T-T_1)) - 1)}{g(T-T_1)} \quad (42)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_{T_0}}{K}\right) + \left(\frac{\sigma_{impl}^2}{2}\right)(T^*)}{\sigma_{impl}\sqrt{T^*}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma_{impl}\sqrt{T^*} \quad (43)$$

$$T^* = \begin{cases} \frac{2T_1 - T}{3} & \text{ak priemerovanie este nezačalo} \\ T^3 & \\ \frac{T^3}{3(T - T_1)^2} & \text{ak priemerovanie už začalo} \end{cases} \quad (44)$$

Funkcia hedgingu potom bude:

$$-\psi = \left(\max\left(\frac{S^T e_{N+1}}{N+1} - K_A; 0\right) - p_{asian} \right) \varphi'(N+1) \quad (45)$$

kde p_{asian} je cena ázijskej opcie, ktorá počíta priemer len z cien v časoch, ktoré patria do T a K_A je realizačná cena.

4 SIMULÁCIA S KONŠTANTNOU VOLATILITOU

Ak uvažujeme o cenovom procese, kde je volatilita nie je stochastickou zložkou, tak môžeme použiť geometrický Brownov pohyb. Proces je geometrický pretože trend a volatilita sú úmerné k aktuálnej hodnote ceny aktíva. Je to výhodné hlavne pre akciový trh, kde relatívna zmena (výnos) je oveľa viac stabilná ako absolútne zmeny v cene akcie. Aj preto investori porovnávajú finančné aktíva na základe ich výnosov (relatívnych zmien) a nie na základe ceny aktív[13][10]. Dôvodom je taktiež rôznorodosť v cenách a tým aj porovnanie absolútnych zmien medzi akciami nemá dostatočnú vypovedaciu hodnotu. Geometrický Brownov pohyb vieme definovať vzťahom[16]:

$$dS(t) = \mu dt \cdot S(t) + \sigma \cdot S(t) \cdot dW(t) \quad (46)$$

$S(t)$ predstavuje cenu v čase t , σ je volatilita a dW predstavuje brownov pohyb, založený na náhodnej premennej. Výnos (relatívnu zmenu) počas obdobia dt vieme vyjadriť vzťahom[16]:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma \cdot dW(t) \quad (47)$$

μ predstavuje tzv. *drift*, ktorý určuje silu trendu. Je konštantný vzhľadom na cenu a na čas. Je však možné nastaviť zmenu tohto parametra. Môže ísť o situáciu, keď očakávame po určité obdobia rastúci trend, ale potom klesajúci. Náhodná zložka dW vychádza zo štandardného normálneho rozdelenia, ktoré je charakteristické strednou hodnotou rovnou 0 a rozptylom rovným 1[9]:

$$\epsilon(t) \sim N(0; 1) \quad (48)$$

Náhodná (stochastická) zložka tohto procesu potom bude mať tvar, ktorý popisuje rovnica[9]:

$$dW(t) = \sqrt{dt} \cdot \epsilon(t) \quad (49)$$

$$\forall i \neq j; \text{cov}(\epsilon(t_i); \epsilon(t_j)) = 0 \quad (50)$$

Rovnica poukazuje na to, že neexistuje vzťah medzi náhodnými zložkami v rôznych časových bodoch.

Simulácie robíme pre nami definované hedgingové stratégie a pre rôzne μ a σ . Kombináciu týchto charakteristík, ktoré definujú Brownov pohyb môžeme definovať ako „situáciu na trhu“ – α

$$\alpha_{x,y} = \{\mu_x, \sigma_y\}$$

Pri simulácii uvažujeme s konštantnou implikovanou volatilitou, ktorá je rovná σ_y .

4.1 Parametre simulácií

- Časové jednotky v rokoch
- $t_L = \tau_N = 1,00 = 252$ dní (*pracovných*)
- $dt = 1/252$
- $dt = 21/252 = \xi$
- $N = 12$
- $L = 252$
- $S(X, \tau_0) = 100,00$
- $r = 3\%$
- Počet iterácií = 1000 na jednu situáciu $\alpha_{x,y}$
- Program -@RISK

Pri simuláciách sledujeme rozdiely medzi strednou hodnotou priemeru získanou pomocou hedgingu a bez hedgingu :

$$E[\phi(\varpi + \psi)] - E[\phi(\varpi)] \quad (51)$$

Ďalej sledujeme rozdiely medzi smerodajnou odchýlkou priemeru získaným pomocou hedgingu a bez hedgingu:

$$\sigma(\phi(\varpi + \psi)) - \sigma(\phi(\varpi)) \quad (52)$$

5 VÝSLEDKY SIMULÁCIÍ

V Tab. 1 je popísaná premenná $E[\phi(\varpi)]$ pri rôznych $\alpha_{x,y}$. S rastúcim driftom rastie aj priemerná hodnota, ktorú zaplatíme za pravidelne kupované aktívum. Kým pri

¹ Drift je často označovaný ako bezriziková úroková miera. My tu uvažujeme o drifte, ktorý reprezentuje nejaký trend . Dôvodom je to, aby sme zachytili ako sa budú správať stratégie pri rôznych situáciách a trendoch na trhu.

0,15% (čo je veľmi silný klesajúci trend) dosahujeme priemer len 83,33% z pôvodnej hodnoty, pri $\mu = +0,15\%$ dosahujeme priemer až o 21% vyšší ako pôvodná (súčasná) cena. Hodnota $E[\phi(\varpi)]$ nie je ovplyvnená hodnotou volatility, pretože bol použitý geometrický Brownov pohyb (rovnicu (47)) s konštantnou volatilitou [10]. To čo sa mení s volatilitou je smerodajná odchýlka priemeru $\sigma(\phi(\varpi))$. S rastúcou volatilitou relatívnych zmien cien podkladového aktíva X rastie aj volatilita $\phi(\varpi)$. Volatilita cien (resp. ich relatívnych zmien) predstavuje nestálosť vo vývoji ceny, ktorá sa odrazí týmto spôsobom aj do nestálosti priemeru. Je teda logické, že $\sigma(\phi(\varpi))$ rastie s rastom σ_y . V Tab. 2 je popísaná volatilita nami sledovaných priemerov. ako je možné vidieť, hodnota $\sigma(\phi(\varpi))$ rastie aj s rastom driftu. Dôvodom sú vyššie dosahované nominálne hodnoty $S(X, t)$ pri rastúcom trende a tým aj odchýlky budú nominálne rásť.

Tabuľka 1 Hodnoty $E[\phi(\varpi)]$ pri rôznych $\alpha_{x,y}$

μ_x / σ_y	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%	83,33	83,33	83,33	83,33	83,33	83,33	83,33
-0,10%	88,41	88,41	88,41	88,41	88,41	88,41	88,41
-0,05%	93,95	93,95	93,95	93,95	93,95	93,95	93,95
0,00%	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98	99,98
0,05%	106,57	106,57	106,57	106,57	106,57	106,57	106,57
0,10%	113,75	113,75	113,75	113,75	113,75	113,75	113,75
0,15%	121,61	121,61	121,61	121,61	121,61	121,61	121,61

Tabuľka 2 Hodnoty $\sigma(\phi(\varpi))$ pri rôznych $\alpha_{x,y}$

μ_x / σ_y	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%	6,61	8,82	11,05	13,30	15,56	17,84	20,15
-0,10%	7,15	9,55	11,96	14,38	16,83	19,30	21,80
-0,05%	7,74	10,34	12,95	15,58	18,23	20,90	23,61
0,00%	8,39	11,21	14,04	16,89	19,76	22,67	25,60
0,05%	9,11	12,16	15,24	18,33	21,45	24,61	27,80
0,10%	9,90	13,22	16,56	19,92	23,31	26,74	30,21
0,15%	10,77	14,38	18,01	21,67	25,36	29,09	32,87

5.1 Stratégia A1 a A2

Stratégia A_1 je založená na kupovaní call opcií v časoch, ktoré patria do množiny T a stratégia A_2 predstavuje predávanie put opcií v časoch, ktoré patria taktiež do množiny T . Obidve stratégie majú kladnú expozíciu voči nárastu ceny podkladového aktíva. To znamená, že istým spôsobom môžu znížiť priemer cien. Ako je možné vidieť v Tab. 3 rozdiely stredných hodnôt $E[\phi(\varpi + \psi)]$ a $E[\phi(\varpi)]$ nie sú veľké, predstavujú len, nachádzajú sa v približne v intervale -2,00 až +2,00 a to aj pri stratégii A_1 a aj pri A_2 . Pri oboch stratégiách sa je rozdiel kladný pri záporných driftoch. Dôvodom sú straty z opcií –

pri A_1 ide o stratu v hodnote opčných prémie, t.j. splatnosť opcií vyprší a keď cena klesá pod realizačnú cenu, tak ich hodnota bude v deň splatnosti nulová. Pri stratégii A_2 dochádza k stratám z realizácia opcií zo strany kupujúceho (my sme predávajúci subjekt). Pokiaľ cena klesá vo väčšej miere tak straty z realizácie opcií budú väčšie než získané opčné prémie. Z funkcií zisku pri call a put opciách je zrejmé, že call opcie budú výhodnejšie pri rastúcom trende a pri klesajúcom trende ich straty sú obmedzené len na výšku opčnej prémie. Naopak pri put opciách dochádza k stratám pri poklese ceny, čo berie potenciál na zníženie priemernej ceny a pri raste ceny je zisk obmedzený na výšku opčnej prémie, čiže pri výraznejších rastoch sa znižuje taktiež potenciál na zníženie hodnoty $E[\phi(\varpi + \psi)]$. Výsledkom týchto základných charakteristík call a put opcií pri našich stratégiách je, že call opcie vo väčšej miere znižujú priemer pri rastúcom trende a v menšej miere obmedzujú zníženie priemeru pri zápornom drifte.

Tabuľka 3 $E[\phi(\varpi + \psi)] - E[\phi(\varpi)]$ (pre A_1 a A_2)

		A1						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		0,93	0,99	1,01	1,02	1,01	0,99	0,96
-0,10%		0,77	0,78	0,78	0,77	0,75	0,72	0,69
-0,05%		0,5	0,49	0,47	0,44	0,41	0,38	0,34
0,00%		0,1	0,08	0,06	0,03	0	-0,04	-0,08
0,05%		-0,45	-0,45	-0,47	-0,49	-0,52	-0,55	-0,59
0,10%		-1,17	-1,13	-1,12	-1,13	-1,14	-1,17	-1,2
0,15%		-2,09	-1,99	-1,93	-1,91	-1,9	-1,91	-1,93
		A2						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		1,67	1,59	1,54	1,5	1,47	1,44	1,42
-0,10%		1,14	1,1	1,07	1,05	1,02	1	0,98
-0,05%		0,62	0,6	0,59	0,57	0,55	0,53	0,5
0,00%		0,12	0,1	0,09	0,07	0,05	0,03	0
0,05%		-0,36	-0,38	-0,41	-0,44	-0,47	-0,51	-0,55
0,10%		-0,79	-0,86	-0,92	-0,97	-1,02	-1,07	-1,12
0,15%		-1,17	-1,32	-1,42	-1,51	-1,59	-1,66	-1,74

To, že simulácie ukázali výhodu pre call opcie vychádza z oceňovania Black Scholesovým modelom a použitím tej istej implikovanej volatility s akou počítame pri cenovom procese. Aj preto sú rozdiely v cenách len malé a taktiež závisia aj od úrokovej miery, ktorá je jedným z komponentov pri call-put parite. Táto výhoda pre call opcie môže zmiznúť v prípade, ak sa implikovaná volatilita opcií príliš líši od volatility, ktorá bude zrealizovaná – hlavne v prípade ak implikovaná volatilita v put opciách bola pri kúpe oveľa väčšia než zrealizovaná volatilita.

Výsledky simulácii ďalej ukázali, že obidve stratégie (A_1 a A_2) znížili hodnotu $\sigma(\phi(\varpi))$ a to pri všetkých situáciách $\alpha_{x,y}$. Hoci ide len o malé hodnoty, ukázalo sa, že hedging nemusí znížiť priemer pri všetkých situáciách, ale môže znížiť do istej miery nestálosť priemeru. Pri klesajúcich trendoch (drift je záporný) stratégia A_2 znižuje $\sigma(\phi(\varpi))$ vo väčšej miere ako stratégia A_1 a pri kladných driftoch je to naopak. Zaujímavým výsledkom je taktiež aj výraznejšie zníženie $\sigma(\phi(\varpi))$ pri zvyšovaní volatility.

Tabuľka 4 $\sigma(\phi(\varpi + \psi)) - \sigma(\phi(\varpi))$ pre A_1 a A_2

		A1						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		-0,22	-0,35	-0,48	-0,62	-0,76	-0,89	-1,03
-0,10%		-0,31	-0,47	-0,62	-0,78	-0,93	-1,08	-1,23
-0,05%		-0,43	-0,61	-0,78	-0,96	-1,13	-1,3	-1,46
0,00%		-0,58	-0,78	-0,97	-1,16	-1,36	-1,55	-1,73
0,05%		-0,75	-0,97	-1,19	-1,41	-1,62	-1,83	-2,04
0,10%		-0,95	-1,19	-1,44	-1,68	-1,92	-2,16	-2,4
0,15%		-1,16	-1,45	-1,73	-2	-2,27	-2,54	-2,8
		A2						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		-0,55	-0,67	-0,79	-0,91	-1,03	-1,14	-1,25
-0,10%		-0,55	-0,69	-0,83	-0,96	-1,1	-1,23	-1,36
-0,05%		-0,54	-0,7	-0,86	-1,01	-1,17	-1,32	-1,47
0,00%		-0,53	-0,71	-0,89	-1,07	-1,25	-1,42	-1,6
0,05%		-0,5	-0,71	-0,91	-1,12	-1,33	-1,53	-1,74
0,10%		-0,47	-0,71	-0,94	-1,18	-1,41	-1,65	-1,88
0,15%		-0,44	-0,7	-0,97	-1,24	-1,51	-1,78	-2,05

5.2 Výsledky simulácií A_3 a A_4

Stratégie A_3 a A_4 sú narozdiel od stratégií A_1 a A_2 založené na otvorení pozícií v opciách v čase t_0 s tým že splatnosť opcií je v jednotlivých časoch, ktoré patria do množiny T . Stratégie A_1 a A_2 neprinesli veľkú zmenu v priemere, pretože realizačná cena bola stále menená podľa spotovej ceny v čase, kedy nakupujeme/predávame ďalšie opcie. Pri stratégiách A_3 a A_4 sa nám však realizačná cena nemení a je stále rovná hodnote 100, čím dosahujeme oveľa väčšie rozdiely medzi $E[\phi(\varpi + \psi)]$ a $E[\phi(\varpi)]$ (viď Tab. 5). Výraznejšie rozdiely vznikajú aj medzi stratégiami. Hodnota rozdielu klesá s nárastom driftu. Pri stratégii A_3 , ktorá využíva nákup opcií je rozdiel pri záporných driftoch kladný. To znamená, že nákup opcií spôsobí zvýšenie priemeru. Ďalej, vyššia volatility znamená aj drahšie opcie, čo spôsobuje pri klesajúcom trende výraznejšie nadhodnotenie priemeru (+3,00 až +5,00). Pri stratégii A_4 , kde ide o predávanie opcií pozorujeme záporné rozdiely aj pri zápornom drifte, pričom pri raste volatility sa tieto rozdiely

dostávajú, ešte do zápornejších čísel. Tento jav je trochu paradoxom, pretože s rastom volatility by mal byť predaj opcií menej výhodný (ziskový) – výsledky simulácie, však ukazujú, že ak sú možné z opcií kryté nižšími nákladmi na kúpu podkladového aktiva, vyššia volatilita môže byť výhodou, pretože opčné prémie sú tak drahšie. Podobne aj call opcie pri stratégii A3 sú drahšie pri vyšších volatilitách. Ak však sa dostávame do nižších spotových cien ako sú realizačné ceny v expiračných dňoch, tak dosahujeme stratu vo výške opčnej prémie. Samozrejme pri neurčitom trende sa opäť do výhody dostáva stratégia A4, pretože pri neurčitom trende je vyššia pravdepodobnosť, že dosiahneme zisk z predaných opčných prémie ako z nakúpených. Výraznejšie rozdiely medzi stratégiami dosahujeme pri kladných driftoch. Tu je výhodnejšia stratégia A3, s nákupom opcií, ale len v podmienkach nižšej volatility. Pri vyššej nestálosti ceny podkladového aktiva je opäť výhodné predávať put opcie.

Tabuľka 5 $E[\phi(\varpi + \psi)] - E[\phi(\varpi)]$ (pre A3 a A4)

		A3						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		3,86	4,58	5,11	5,49	5,78	6	6,17
-0,10%		3,79	4,26	4,58	4,81	4,98	5,1	5,2
-0,05%		3,1	3,29	3,43	3,53	3,61	3,67	3,73
0,00%		1,18	1,24	1,32	1,39	1,46	1,54	1,61
0,05%		-2,69	-2,34	-2,08	-1,85	-1,65	-1,46	-1,29
0,10%		-8,39	-7,53	-6,85	-6,31	-5,85	-5,45	-5,09
0,15%		-15,37	-14,04	-12,92	-11,98	-11,17	-10,47	-9,85
		A4						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		0,21	-0,5	-1,18	-1,85	-2,5	-3,14	-3,77
-0,10%		-0,44	-1,16	-1,87	-2,57	-3,27	-3,96	-4,64
-0,05%		-1,09	-1,85	-2,6	-3,35	-4,09	-4,83	-5,57
0,00%		-1,73	-2,54	-3,36	-4,17	-4,97	-5,78	-6,58
0,05%		-2,35	-3,25	-4,14	-5,03	-5,91	-6,79	-7,67
0,10%		-2,94	-3,96	-4,96	-5,94	-6,92	-7,88	-8,84
0,15%		-3,51	-4,68	-5,8	-6,91	-7,99	-9,06	-10,12

V Tab. 6 sú rozdiely hodnôt $\sigma(\phi(\varpi + \psi))$ a $\sigma(\phi(\varpi))$. Ako je vidieť, hedging znížil smerodajnú odchýlku takmer pri všetkých situáciách $\alpha_{x,y}$. Pri stratégii A3 sa tento rozdiel prehľbuje s rastom driftu (vyšší drift znamená vyššiu pravdepodobnosť oplatenia call opcií). Pri vyšších volatilitách robia nakúpené call opcie priemer stabilnejším – smerodajná odchýlka pri kladných driftoch a vyšších volatilitách je nižšia aj o viac než 10 jednotiek. Takéto výrazne zníženie je spôsobené ziskom z opcií, ktoré hedgujú nepriaznivý vývoj ceny. Pri stratégii A4 dochádza k menším záporným rozdielom, ktoré

sa prehlbujú hlavne s nárastom volatility. Aj tu teda môžeme tvrdiť, že hedging aj pomocou predávania put opcií môže znížiť nestabilitu priemeru. Vzhľadom na výplatné funkcie pri predávaní put opcií, ktoré majú limitovaný zisk v podobe opčnej prémie a možnosť oveľa väčších strát pri poklese spotovej ceny pod realizačnú cenu, je zníženie smerodajne odchýlky obmedzenejšie ako pri stratégii A3.

Tabuľka 6 $\sigma(\phi(\varpi + \psi)) - \sigma(\phi(\varpi))$ pre A3 a A4

		A3						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		0,37	0,12	-0,35	-0,96	-1,62	-2,33	-3,07
-0,10%		-0,19	-0,85	-1,61	-2,43	-3,28	-4,14	-5,01
-0,05%		-1,44	-2,4	-3,39	-4,38	-5,37	-6,36	-7,35
0,00%		-3,43	-4,56	-5,69	-6,81	-7,91	-9,01	-10,1
0,05%		-5,82	-7,11	-8,37	-9,61	-10,83	-12,04	-13,24
0,10%		-7,92	-9,61	-11,15	-12,61	-14,01	-15,36	-16,69
0,15%		-9,52	-11,82	-13,8	-15,59	-17,26	-18,85	-20,37
		A4						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		-0,44	-0,63	-0,87	-1,16	-1,5	-1,9	-2,35
-0,10%		-0,43	-0,63	-0,9	-1,22	-1,6	-2,04	-2,54
-0,05%		-0,4	-0,63	-0,93	-1,29	-1,71	-2,2	-2,75
0,00%		-0,36	-0,62	-0,95	-1,36	-1,83	-2,37	-2,99
0,05%		-0,31	-0,61	-0,98	-1,43	-1,95	-2,56	-3,24
0,10%		-0,25	-0,58	-1	-1,5	-2,09	-2,76	-3,52
0,15%		-0,19	-0,55	-1,01	-1,57	-2,23	-2,98	-3,83

5.3 Výsledky simulácií pre A5

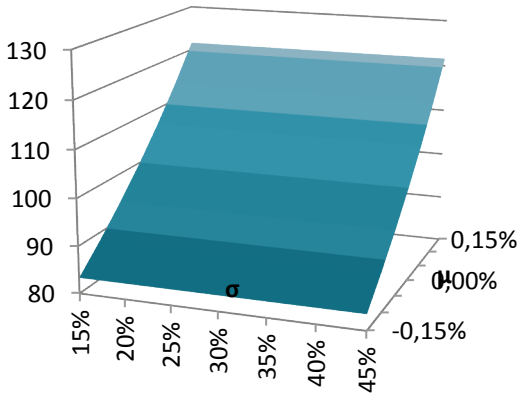
Posledná stratégia je založená na použití exotickéj opcie zameranej na priemery – ázijskej opcie. Výsledky ukazujú (Tab.7), že použitie ázijskej opcie je najvýhodnejšie pri rastúcich trendoch (drift je kladný). Podobne ao pri stratégii A3., aj tu pri záporných driftoch strácame, čo sa týka nákladov, pretože stredná hodnota $\phi(\varpi + \psi)$ je vyššia ako bez použitia ázijskej opcie. Toto zvyšovanie sa narastá s volatilitou, kde sa nastáva ázijská opcia drahšou pri nákupe. Výsledky poukazujú, že ázijská opcia zvyšuje priemer najviac pri záporných driftoch.. Pri kladných driftoch, ktoré reprezentujú rastúci trend sa dostávame do situácie, kedy sa priemer výrazne znižuje. Čo sa týka rozdielu stredných hodnôt priemerov $\phi(\varpi + \psi)$ a $\phi(\varpi)$ je však ázijská opcia výhodnejšia pri rastúcich trendoch vo väčšej miere ako stratégia A3, čo znamená, že je výhodnejšia aj oproti stratégii A4. môžeme teda tvrdiť, že vyššie kladné rozdiely pri záporných driftoch sú istým spôsobom cenou za lepšie výsledky pri rastúcom trende. čo sa týka rozdielu $\sigma(\phi(\varpi + \psi))$ a $\sigma(\phi(\varpi))$ aj tu sa ukázal hedging ako určitý komponent, ktorý stabilizuje odhad priemeru, pretože znižuje smerodajnú odchýlku výsledku. Výrazne zníženie

nastáva pri rastúcich trendoch, kedy je oveľa viac pravdepodobné, že priemer bude vyšší než je realizačná cena ázijskej opcie (pri simulácii sme ju stanovili na hodnotu spotovej ceny v čase t_0). Pri nižších volatilitách smerodajná odchýlka klesá pod hodnotu 1,00.

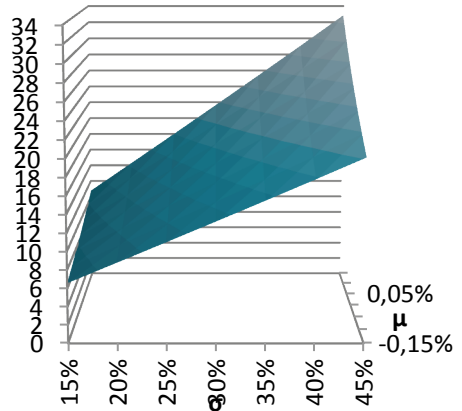
Tabuľka 64

		$E[\phi(\varpi + \psi)] - E[\phi(\varpi)]$ pre A5						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		4,29	5,28	6,09	6,74	7,3	7,78	8,19
-0,10%		4,07	4,74	5,24	5,63	5,96	6,23	6,48
-0,05%		3,19	3,43	3,61	3,75	3,87	3,98	4,09
0,00%		0,85	0,85	0,86	0,87	0,89	0,91	0,93
0,05%		-3,48	-3,33	-3,25	-3,19	-3,17	-3,15	-3,15
0,10%		-9,75	-9,14	-8,77	-8,54	-8,39	-8,29	-8,22
0,15%		-17,36	-16,43	-15,7	-15,16	-14,79	-14,53	-14,35
		$\sigma(\phi(\varpi + \psi)) - \sigma(\phi(\varpi))$ pre A5						
μ_x / σ_y		15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%
-0,15%		0,1	-0,21	-0,83	-1,68	-2,68	-3,81	-5,04
-0,10%		-0,31	-1,09	-2,08	-3,21	-4,46	-5,81	-7,24
-0,05%		-1,53	-2,7	-3,99	-5,35	-6,8	-8,33	-9,93
0,00%		-3,69	-5,06	-6,51	-8,03	-9,63	-11,31	-13,07
0,05%		-6,3	-7,85	-9,44	-11,11	-12,87	-14,71	-16,63
0,10%		-8,59	-10,58	-12,49	-14,42	-16,39	-18,43	-20,56
0,15%		-10,3	-12,98	-15,4	-17,72	-20,03	-22,37	-24,77

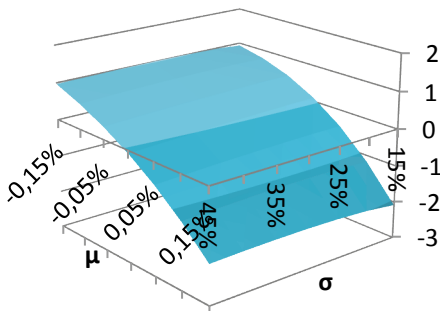
6 GRAFY VÝSLEDKOV SIMULACÍ



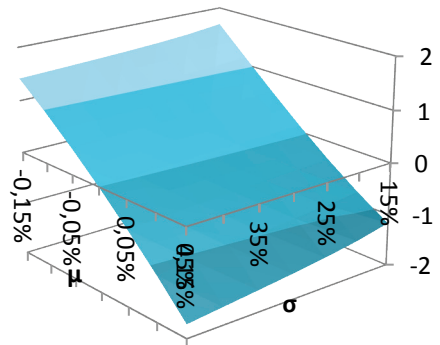
Obrázok 1 $E[\phi(\varpi)]$



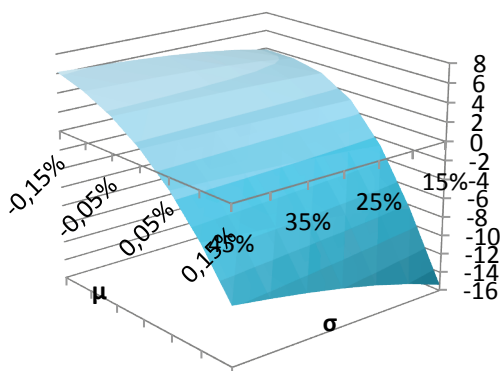
Obrázok 2 $\sigma(\phi(\varpi))$



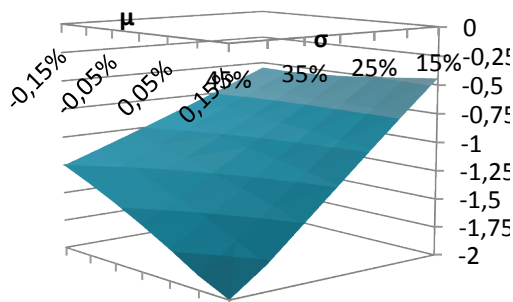
Obrázok 3 $E[\phi(\varpi + \psi)] - E[\phi(\varpi)]$ (A1)



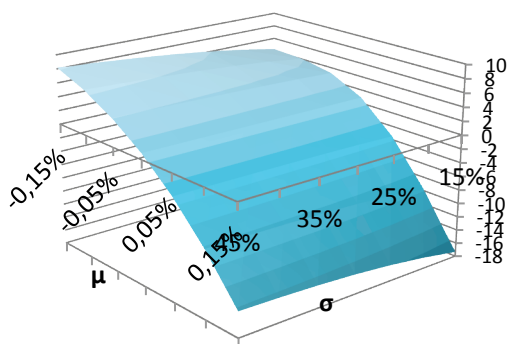
Obrázok 4 $E[\phi(\varpi + \psi)] - E[\phi(\varpi)]$ (A2)



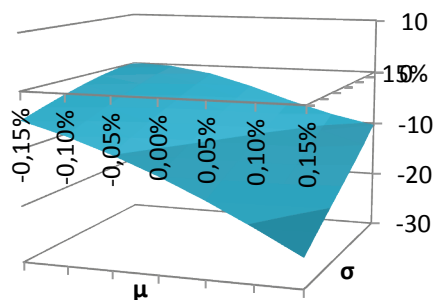
Obrázok 5 $E[\phi(\tau + \psi)] - E[\phi(\tau)]$ (A3)



Obrázok 6 $\sigma(\phi(\tau + \psi)) - \sigma(\phi(\tau))$ (A3)



Obrázok 7 $E[\phi(\tau + \psi)] - E[\phi(\tau)]$ (A5)



Obrázok 8 $\sigma(\phi(\tau + \psi)) - \sigma(\phi(\tau))$ (A5)

7 ZÁVER

V práci je popísaný vzťah priemernej ceny a vplyvu hedgingu na tento priemer. Vplyv hedgingu na priemernú cenu závisí hlavne od zvolenej stratégie a taktiež aj od situácie, ktorá sa na trhu vyskytne. Akýkoľvek hedging znamená okrem eliminácie rizika aj do istej miery stratu príležitosti zisku alebo zvýšenia nákladov oproti nákladom bez hedgingu. Výsledky simulácii poukazujú aj na tento jav, pretože pri akejkoľvek opčnej stratégii existujú situácie, kedy zavedenie hedgingu zvýšilo strednú hodnotu priemeru, ktorý definuje aj náklady na nákup aktíva za sledované obdobie. Ide hlavne o situácie,

kedy vývoj ceny podlieha klesajúcemu trendu. Dôvodom je strata pri predaných put opciách a taktiež strata hodnoty opčných prémie pri nakúpených call opciách. Jediná stratégia, ktorá aj v týchto situáciách dosahuje záporný rozdiel strednej hodnoty priemerov stratégie s hedgingom a bez hedgingu je A4. Stratégie A1 a A2, ktorých princíp spočíva na vstupovaní do pozícií v opciách pravidelne počas nákupu podkladového aktíva, dosahujú len malé rozdiely. Pri rastúcom trende sú tieto rozdiely v priemeroch záporné, čo poukazuje na to, že stratégia je úspešná a znižujú tak priemernú cenu. Toto zníženie je však opäť veľmi malé. Stratégie A3 a A4 dosahujú väčšie rozdiely v stredných hodnotách priemerov s hedgingom a bez hedgingu, pri klesajúcich trendoch kladné a pri rastúcich trendoch záporné. Obzvlášť výhodnou stratégiou pri silnejších rastúcich trendoch je stratégia A3, ktorá je zameraná na nákup call opcií, stratégia A4 je výhodnejšia pri netrendovom správaní trhu. Použitie ázijskej opcie sa ukázalo ako najlepšia stratégia pri hedgovaní priemeru, pretože pri rastúcich trendoch ceny podkladového aktíva dosahuje táto stratégia najnižšie stredné hodnoty priemerov. Pri poklesoch trhu sú však náklady na nákup opcie záťažou a tým pádom zvyšujú strednú hodnotu priemeru. Kladným prínosom hedgingu je ešte aj zníženie smerodajnej odchýlky, čo vytvára stabilnejšie prostredie pri plánovaní finančných tokov.

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] ALEXANDER, Carol : *Market Risk Analysis*. Chichester :John Wiley and Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0-470-99789-5.
- [2] BEAUMONT, P.H.: *Financial Engineering Principles*, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2004. ISBN 0-471-46358-2.
- [3] CIPRA, T.: *Finanční a pojistné vzorce*. Praha: GRADA Publishing, 2006. ISBN 80-247-1633-X
- [4] CUTHBERTSON, K.: *Quantitative Financial Economics: Stock, Bonds and Foreign Exchange*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 1996. ISBN 0-471-95359-8.
- [5] DUBIL, R : *An Arbitrage guide to financial markets*, Chichester :John Wiley & Sons, Ltd, 2004. ISBN 0-470-85332-8.
- [6] FABOZZI, FRANK J. : *The Handbook of Financial Instruments*. John Wiley and Sons Ltd, 2002. ISBN 0-471-22092-2.
- [7] FABOZZI, F.J. – PETERSON, P.P.: *Financial Mangement and Analysis*, Hoboken: John Wiley & sons, 2003. ISBN 0-471-23484-2
- [8] FONTANILLS, G. A.- *The Options Course : Hight Profit and Low Stress Trading Methods*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2005. ISBN 0-471-66851-6

- [9] HULL J.C. – *Options, Futures and other derivatives*. Prentice Hall, ISBN 0-13-009056-5.
- [10] JACKEL, P.: *Monte Carlo methods in finance*, John Wiley & Sons, Inc, Chichester, 2002, ISBN 0471 49741 X
- [11] JÍLEK, J.: *Deriváty, hedžové fondy, offshorové spoločnosti*, Praha: GRADA Publishing, 2006. ISBN 80-247-1826-X.
- [12] JÍLEK, J.: *Finanční a komoditní deriváty v praxi*. Praha: GRADA Publishing a.s. 2010. ISBN 978-80247-3696-9.
- [13] JORION, P.: *Financial Risk Manager Handbook*. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 2007. ISBN 978-0-470-126301.
- [14] KNIGHT, J.- SATCHELL, S : *Forecasting volatility in the financial markets*. Elsevier, Burlington, 2007. ISBN 0-7506-6942-X.
- [15] LEVY, H – SARNAT, M _ *Portfolio and Investment Selection : Theory and Practice*. Prentice/Hall International, 1984. ISBN 0-13-687558-0
- [16] LUENBERGER, D.G. : *Investment Scinece*, Oxford University Press, 1998. ISBN 0-19-510809-4.
- [17] MLYNAROVÍČ, V. , *Finančné investovanie, teória a aplikácie*. Edícia Ekonómia, 2001. ISBN 80-89047-16-5.
- [18] ŠOLTÉS, V.: *Finančné deriváty*. Košice: Technická univerzita v Košiciach, 2002. ISBN 80-7099-770-2.
- [19] TALEB, Nassim: *Dynamic Hedging: Managing vanilla and exotic options*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1997. ISBN 0-471-15280-3.
- [20] WEERT F., *Exotic Options Trading*. John Wiley and Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0-471-51790-1.
- [21] WILLMOTT P. – HOWINSON S. – DEWYNNE J.: *The Matematics of Financial Derivates*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN 0-521-49789-2.